

ОБ ОДНОМ КАНОНИЧЕСКИМ ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.11566295>

Абдукодиров Абдурашид

Тулқинбоев Тулқинжон

Факультет математики и информатики

Ферганский государственный университет

Фергана, Узбекистан

abdurashid1976@mail.ru,

tulqinjon98@mail.ru.

Аннотация

В данной работе, приведены канонические виды дифференциальных уравнений шестого порядка с двумя независимыми переменными с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова

канонический вид; дифференциальные уравнения с частными производными; характеристика; характеристическое уравнение.

В данной работе рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка с постоянными коэффициентами.

Решение этой проблемы в случае уравнения третьего и четвертого порядка изучена в работах [1,2]. В работах [3,4,5] рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка.

В некоторой области Ω плоскости xOy , рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных:

$$L[u] = \sum_{k=0}^6 A_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^{6-k} \partial y^k} = F, \quad (1)$$

где A_k ($k = 0, 6$) - заданные постоянные, а F - непрерывная функция, зависящая от x, y, u и её частные производные по x, y до пятого порядка

включительно, причем $\sum_{k=0}^n A_k^2 \neq 0$.

С помощью преобразования переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, допускающего обратное преобразование, то есть выполняющее условие $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$, из (1) получаем новое уравнение:

$$M[u] = \sum_{k=0}^6 a_k \frac{\partial^6 u}{\partial \xi^{6-k} \partial \eta^k} = F_1, \quad (2)$$

где F_1 - функция, зависящая от ξ, η, u и её частные производные по ξ, η до пятого порядка включительно, а a_k - новые коэффициенты, линейно зависящие от A_k , $k = \overline{0, 6}$.

Если учесть обозначение

$$f(z_x, z_y) = A_0 z_x^6 + A_1 z_x^5 z_y + A_2 z_x^4 z_y^2 + A_3 z_x^3 z_y^3 + A_4 z_x^2 z_y^4 + A_5 z_x z_y^5 + A_6 z_y^6,$$

где a_k ($k = \overline{0, 6}$), то уравнения (2) в общем виде [8] предстанет как:

$$a_k = \frac{1}{k!} \left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \xi_x} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \xi_y} \right)^k f(\xi_x, \xi_y) \equiv \frac{1}{(n-k)!} \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \xi_y \frac{\partial}{\partial \eta_y} \right)^{n-k} f(\eta_x, \eta_y) \quad (3)$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы уравнение (1) имел канонический вид и чтобы наибольшие коэффициенты уравнения (2) обращались в нуль. Так как, из формулы (3) видно, что все коэффициенты уравнения (3) связаны с функцией $f(z_x, z_y)$ и её частными производными по аргументам, тогда рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка:

$$A_0 z_x^6 + A_1 z_x^5 z_y + A_2 z_x^4 z_y^2 + A_3 z_x^3 z_y^3 + A_4 z_x^2 z_y^4 + A_5 z_x z_y^5 + A_6 z_y^6 = 0 \quad (4)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ - какое-нибудь частное решение этого уравнения. Тогда, если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент a_0 , очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных будет связано с решением уравнения (4). А решение уравнения (4) связано общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения

$$A_0 (dy)^6 - A_1 (dy)^5 dx + A_2 (dy)^4 (dx)^2 - A_3 (dy)^3 (dx)^3 + A_4 (dy)^2 (dx)^4 - A_5 dy (dx)^5 + A_6 (dx)^6 = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением характеристик для уравнения (1), а его интегралы – характеристиками. Разделяя обе части (6) на $(dx)^n$ и введя обозначение $t = dy/dx$, имеем алгебраическое уравнение

$$A_0 t^6 - A_1 t^5 + A_2 t^4 - A_3 t^3 + A_4 t^2 - A_5 t + A_6 = 0, \quad (t = dy/dx). \quad (6)$$

Если учесть, что $t = dy/dx$, то можно увидеть, что нахождение общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения (5) связано с корнями (алгебраического относительно t ($t = dy/dx$)) уравнения (6).

Как и в работе[4], можно доказать следующие три леммы, которые играют важную роль при нахождении канонического вида уравнения (1):

Лемма 1. Если функция $z = \varphi(x, y)$ является решением уравнения (5), то соотношение $\varphi(x, y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (6).

Лемма 2. Если $\varphi(x, y) = const$ представляет собой k -кратный ($k \leq 6$) общий интеграл уравнения (6), то при $z = \varphi(x, y)$ функция $f(z_x, z_y)$ и её все производные по z_x, z_y до $(k-1)$ порядка включительно равны нулю.

Лемма 3. При преобразовании переменных $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, допускающие обратное преобразование, число и кратность действительных и комплексных корней уравнения (7) инвариантны и имеет место тождество

$$\tilde{D}_6 = J^{30} D_6.$$

Здесь $D_6 = A_0^{10} \prod_{6 \geq i > j \geq 1} (t_i - t_j)^2$ является дискриминантом уравнения (6), а

$$\tilde{D}_6 = a_0^{30} \prod_{6 \geq i > j \geq 1} (\mu_i - \mu_j)^2 - \text{дискриминант уравнения}$$

$$a_0 \mu^6 - a_1 \mu^5 + a_2 \mu^4 - a_3 \mu^3 + a_4 \mu^2 - a_5 \mu + a_6 = 0, \quad (\mu = d\eta/d\xi), \quad (7)$$

где t_1, t_2, \dots, t_n и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ - корни уравнения (6) и (7) соответственно.

Как известно, из следствия основной теоремы алгебры следует что, любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом их кратности.

Без ограничения общности можно считать, что выполняется и условие $A_0 > 0$. Если $A_0 < 0$, то умножая уравнение (1) на -1 , приходим к желаемому случаю. Если же $A_0 \equiv 0$, но $A_5 \neq 0$, то заменяя x и y местами приходим предыдущему случаю. Если $A_0 \equiv 0$ и $A_5 \equiv 0$, то замена $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$,

где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ - произвольные линейно независимые функции, причем $f(\xi_x, \xi_y) \neq 0$, приводит к уравнению вида (1), с коэффициентом $a_0 = f(\xi_x, \xi_y) \neq 0$.

Согласно формулам Виета [6] для уравнения (6), имеет место равенства

$$t_1 + t_2 + \dots + t_6 = \frac{A_1}{A_0}, \quad t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots + t_5 t_6 = \frac{A_2}{A_0}, \dots, \quad t_1 \cdot \dots \cdot t_6 = \frac{A_6}{A_0}. \quad (8)$$

Пусть уравнение (6) имеет шесть различных действительных корней $t_1 = \lambda_1$, $t_2 = \lambda_2$, $t_3 = \lambda_3$, $t_4 = \lambda_4$, $t_5 = \lambda_5$, $t_6 = \lambda_6$ и $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$. Тогда, уравнение (5) имеет шесть различных действительный общих интеграла:

$$\psi_1(x, y) = y - \lambda_1 x = const, \quad \psi_2(x, y) = y - \lambda_2 x = const, \quad \psi_3(x, y) = y - \lambda_3 x = const,$$

$$\psi_4(x, y) = y - \lambda_4 x = const, \quad \psi_5(x, y) = y - \lambda_5 x = const,$$

$$\psi_6(x, y) = y - \lambda_6 x = const.$$

Если учесть (8), то уравнению (1) можно записать в виде:

$$A_0 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_5 \lambda_6) \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6) \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} = F \right].$$

Отсюда имеем

$$A_0 \left[\prod_{k=1}^6 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] = F \quad (9)$$

Введя следующие обозначения $\frac{(\lambda_1 - \lambda_5)}{(\lambda_1 - \lambda_6)} = \mu_1$, $\frac{(\lambda_2 - \lambda_5)}{(\lambda_2 - \lambda_6)} = \mu_2$, $\frac{(\lambda_3 - \lambda_5)}{(\lambda_3 - \lambda_6)} = \mu_3$,

$\frac{(\lambda_4 - \lambda_5)}{(\lambda_4 - \lambda_6)} = \mu_4$, рассмотрим замену

$$\xi = (1 + \sqrt{\mu_3 \mu_4}) y - (\lambda_5 + \lambda_6 \sqrt{\mu_3 \mu_4}) x, \quad \eta = (1 - \sqrt{\mu_3 \mu_4}) y - (\lambda_5 - \lambda_6 \sqrt{\mu_3 \mu_4}) x. \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} = -(\lambda_5 + \lambda_6 \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\lambda_5 - \lambda_6 \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} = (1 + \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (1 - \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (9) имеем:

$$\begin{aligned} & \left[(\lambda_1 - \lambda_5 + \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_1 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_1 - \lambda_5 - \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_1 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left[(\lambda_2 - \lambda_5 + \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_2 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_2 - \lambda_5 - \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_2 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left[(\lambda_3 - \lambda_5 + \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_3 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_3 - \lambda_5 - \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_3 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left[(\lambda_4 - \lambda_5 + \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_4 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_4 - \lambda_5 - \sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_4 - \lambda_6)) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left[\sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_5 - \lambda_6) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \left[\sqrt{\mu_3 \mu_4} (\lambda_6 - \lambda_5) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] = F_1 \quad . \end{aligned}$$

Разделим обе стороны последнего уравнения на $-\mu_3 \mu_4 (\lambda_1 - \lambda_5) (\lambda_2 - \lambda_5) (\lambda_3 - \lambda_5) (\lambda_4 - \lambda_5) (\lambda_5 - \lambda_6)^2 (\neq 0)$ и получим:

$$\begin{aligned} & \left[(\mu_1 + \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\mu_1 - \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \left[(\mu_2 + \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\mu_2 - \sqrt{\mu_3 \mu_4}) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \sqrt{\mu_3} \left[(\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\sqrt{\mu_3} - \sqrt{\mu_4}) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \sqrt{\mu_4} \left[(\sqrt{\mu_4} + \sqrt{\mu_3}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\sqrt{\mu_4} - \sqrt{\mu_3}) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) = F_2, \quad (11) \end{aligned}$$

где, $F_2 = F_1 / \left\{ -\mu_3 \mu_4 (\lambda_1 - \lambda_6) (\lambda_2 - \lambda_6) (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 - \lambda_6) (\lambda_5 - \lambda_6)^2 \right\}$.

Уравнение (11) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(\mu_1 - \sqrt{\mu_3 \mu_4})}{(\mu_1 + \sqrt{\mu_3 \mu_4})} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \left[\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(\mu_2 - \sqrt{\mu_3 \mu_4})}{(\mu_2 + \sqrt{\mu_3 \mu_4})} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{(\sqrt{\mu_3} - \sqrt{\mu_4})^2}{(\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4})^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) = F_3 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + c_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = F_3$$

$$\text{где, } c_1 = \frac{(\mu_1 - \sqrt{\mu_3\mu_4})}{(\mu_1 + \sqrt{\mu_3\mu_4})}, \quad c_2 = \frac{(\mu_2 - \sqrt{\mu_3\mu_4})}{(\mu_2 + \sqrt{\mu_3\mu_4})}, \quad b^2 = \frac{(\sqrt{\mu_3} - \sqrt{\mu_4})^2}{(\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4})^2},$$

$$F_3 = F_2 / \left\{ \sqrt{\mu_3\mu_4} (\mu_1 + \sqrt{\mu_3\mu_4}) (\mu_2 + \sqrt{\mu_3\mu_4}) (\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4})^2 \right\}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть уравнение (6) имеет шесть различных действительных корней. Тогда уравнение (1) может быть приведено следующему каноническому виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + c_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = F_3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27. № 10. С. 1734.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными четвертого порядка // Узбекский математический журнал, 1994, №3. С. 7-21.
3. Уринов А., Абдукодиров А. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка // Материалы второй Международной Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». -Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С.251-254.
4. Уринов А., Абдукодиров А. О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с некратами характеристиками // Бюлетен Институт Математики. 2023. Т.6. №2. -С. 155-165.
5. Абдукодиров А. О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с кратными характеристиками // Бюлетен Институт Математики. 2023. Т.6. №4. -С. 100-107.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -Москва.: Наука, 1968.-432 с.