International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-6| 2024 Published: |22-06-2024|

ОБ ОДНОМ КАНОНИЧЕСКИМ ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

https://doi.org/10.5281/zenodo.11562447

Абдукодиров Абдурашид
Тулқинбоев Тулкинжон
Факультет математики и информатики
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан
abdurashid1976@mail.ru,
tulqinjon98@mail.ru.

Аннотация

в данной работе, приведены канонические виды дифференциальных уравнений шестого порядка с двумя независимыми переменными с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова

канонический вид; дифференциальные уравнения с частными производными; характеристика; характеристическое уравнение.

В данной работе рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка с постоянными коэффициентами.

Решение этой проблемы в случае уравнения третьего и четвертого порядка изучена в работах [1,2]. В работах [3,4,5] рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка.

В некоторой области Ω плоскости xOy, рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных:

$$L[u]=\sum_{k=0}^{6} A_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^{6-k} \partial y^k}=F, \qquad (1)$$

где A_k $(k=\overline{0,6})$ - заданные постоянные, а F - непрерывная функция, зависящая от x, y, u и её частные производные по x, y до пятого порядка включительно, причем $\sum_{k=0}^{n} A_k^2 \neq 0$.

С помощью преобразования переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, допуска-ющего обратное преобразование, то есть выполняющее условие $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$, из (1) получаем новое уравнение:

$$M[u] = \sum_{k=0}^{6} a_k \frac{\partial^6 u}{\partial \xi^{6-k} \partial \eta^k} = F_1, \qquad (2)$$

где F_1 - функция, зависящая от ξ, η, u и её частные производные по ξ, η до пятого порядка включительно, а a_k - новые коэффициенты, линейно зависящие от A_k, $k = \overline{0,6}$.

Если учесть обозначение

$$f(z_x, z_y) = A_0 z_x^6 + A_1 z_x^5 z_y + A_2 z_x^4 z_y^2 + A_3 z_x^3 z_y^3 + A_4 z_x^2 z_y^4 + A_5 z_x z_y^5 + A_6 z_y^6,$$

где a_k $(k = \overline{0,6})$, то уравнения (2) в общем виде[8] предстанет как:

$$a_k = \frac{1}{k!}\left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \xi_x} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \xi_y}\right)^k f(\xi_x, \xi_y) \equiv \frac{1}{(n-k)!}\left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \xi_y \frac{\partial}{\partial \eta_y}\right)^{n-k} f(\eta_x, \eta_y)$$

(3)

Выберем переменные ξ и η так, чтобы уравнение (1) имел канонический вид и чтобы наибольшие коэффициенты уравнения (2) обращались в нуль. Так как, из формули (3) видно, что все коэффициенты уравнения (3) связаны с функцией $f(z_x, z_y)$ и её частными производными по аргументам, тогда рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка:

$$A_0 z_x^6 + A_1 z_x^5 z_y + A_2 z_x^4 z_y^2 + A_3 z_x^3 z_y^3 + A_4 z_x^2 z_y^4 + A_5 z_x z_y^5 + A_6 z_y^6 = 0 \qquad (4)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$- какое-нибудь частное решение этого уравнения. Тогда, если положить $\xi = \phi(x, y)$, то коэффициент a_0, очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных будет связано с решением уравнения (4). А решение уравнения (4) связано общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения

$$A_0(dy)^6 - A_1(dy)^5dx + A_2(dy)^4(dx)^2 - A_3(dy)^3(dx)^3 + A_4(dy)^2(dx)^4 - A_5dy(dx)^5 + A_6(dx)^6 = 0$$
(5)

Уравнение (5) называется уравнением характеристик для уравнения (1), а его интегралы – характеристиками. Разделяя обе части (6) на $(dx)^n$ и введя обозначение $t = dy/dx$, имеем алгебраическое уравнение

$$A_0t^6 - A_1t^5 + A_2t^4 - A_3t^3 + A_4t^2 - A_5t + A_6 = 0, \ (t = dy/dx). \qquad (6)$$

Если учесть, что $t = dy/dx$, то можно увидеть, что нахождение общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения (5) связано с корнями (алгебраического относительно t ($t = dy/dx$)) уравнения (6).

Как и в работе[4], можно доказать следующие три леммы, которые играют важную роль при нахождении канонического вида уравнения (1):

Лемма 1. Если функция $z = \varphi(x, y)$ является решением уравнения (5), то соотношение $\varphi(x, y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (6).

Лемма 2. Если $\varphi(x, y) = const$ представляет собой *k*-кратный $(k \le 6)$ общий интеграл уравнения (6), то при $z = \varphi(x, y)$ функция $f(z_x, z_y)$ и её все производные по z_x, z_y до (*k*-1) порядка включительно равны нулю.

Лемма 3. При преобразовании переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, допускающие обратное преобразование, число и кратность действительных и комплексных корней уравнения (7) инвариантны и имеет место тождество $\tilde{D}_6 = J^{30} D_6$.

Здесь $D_6 = A_0^{10} \prod_{6 \ge i > j \ge 1} (t_i - t_j)^2$ является дискриминантом уравнения (6), а $\tilde{D}_6 = a_0^{30} \prod_{6 \ge i > j \ge 1} (\mu_i - \mu_j)^2$ - дискриминант уравнения

$$a_0\mu^6 - a_1\mu^5 + a_2\mu^4 - a_3\mu^3 + a_4\mu^2 - a_5\mu + a_6 = 0, \qquad (\mu = d\eta/d\xi),$$
(7)

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ - корни уравнения (6) и (7) соответственно. Как известно, из следствия основной теоремы алгебры следует что, любой многочлен степени *n* над полем комплексных чисел имеет в нём ровно *n* корней, с учётом их кратности.

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-6| 2024 Published: |22-06-2024|

Без ограничения общности можно считать, что выполняется и условие $A_0 > 0$. Если $A_0 < 0$, то умножая уравнение (1) на -1, придем к желаемому случаю. Если же $A_0 \equiv 0$, но $A_5 \neq 0$, то заменяя x и y местами придем предыдущему случаю. Если $A_0 \equiv 0$ и $A_5 \equiv 0$, то замена $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$, где $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$- произвольные линейно независимые функции, причем $f(\xi_x,\xi_y) \neq 0$, приводит к уравнению вида (1), с коэффициентом $a_0 = f(\xi_x,\xi_y) \neq 0$.

Согласно формулам Виета [6] для уравнения (6), имеет место равенства

$$t_1 + t_2 + ... + t_6 = \frac{A_1}{A_0}, \quad t_1t_2 + t_1t_3 + ... + t_5t_6 = \frac{A_2}{A_0}, ..., \; t_1 \cdot ... \cdot t_6 = \frac{A_6}{A_0}. \qquad (8)$$

Пусть уравнение (6) имеет шесть различных действительных корня $t_1 = \lambda_1$, $t_2 = \lambda_2$, $t_3 = \lambda_3$, $t_4 = \lambda_4$, $t_5 = \lambda_5$, $t_6 = \lambda_6$ и $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$. Тогда, уравнение (5) имеет шесть различных действительный общих интеграла:

$$\psi_1(x,y) = y - \lambda_1 x = const, \quad \psi_2(x,y) = y - \lambda_2 x = const, \psi_3(x,y) = y - \lambda_3 x = const,$$

$$\psi_4(x,y) = y - \lambda_4 x = const, \quad \psi_5(x,y) = y - \lambda_6 x = const,$$

$$\psi_6(x,y) = y - \lambda_6 x = const.$$

Если учесть (8), то уравнению (1) можно записать в виде:

$$A_0\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+...+\lambda_5\lambda_6)\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + ...\right.$$

$$\left. ... + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)\frac{\partial^6 u}{\partial y^6} = F\right].$$

Отсюда имеем

$$A_0\left[\prod_{k=1}^{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial y}\right)\right] = F \qquad (9)$$

Введя следующие обозначения $\frac{(\lambda_1-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_6)} = \mu_1$, $\frac{(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_2-\lambda_6)} = \mu_2$, $\frac{(\lambda_3-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_6)} = \mu_3$, $\frac{(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_4-\lambda_6)} = \mu_4$, рассмотрим замену

$$\xi = \left(1+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)y - \left(\lambda_5 + \lambda_6\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)x, \quad \eta = \left(1-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)y - \left(\lambda_5 - \lambda_6\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)x. \qquad (10)$$

Тогда

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-6| 2024 Published: |22-06-2024|

$$\frac{\partial}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}=-\left(\lambda_5+\lambda_6\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}-\left(\lambda_5-\lambda_6\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}=\left(1+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(1-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (9) имеем:

$$\left[\left(\lambda_1-\lambda_5+\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_1-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\lambda_1-\lambda_5-\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_1-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left[\left(\lambda_2-\lambda_5+\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_2-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\lambda_2-\lambda_5-\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_2-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left[\left(\lambda_3-\lambda_5+\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_3-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\lambda_3-\lambda_5-\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_3-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left[\left(\lambda_4-\lambda_5+\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_4-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\lambda_4-\lambda_5-\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_4-\lambda_6\right)\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left[\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_5-\lambda_6\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]\left[\sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\lambda_6-\lambda_5\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]=F_1 \ .$$

Разделим обе стороны последнего уравнения на $-\mu_3\mu_4\left(\lambda_1-\lambda_5\right)\left(\lambda_2-\lambda_5\right)\left(\lambda_3-\lambda_5\right)\left(\lambda_4-\lambda_5\right)\left(\lambda_5-\lambda_6\right)^2\ (\neq 0)$ и получим:

$$\left[\left(\mu_1+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\mu_1-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times\left[\left(\mu_2+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\mu_2-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\mu_3}\left[\left(\sqrt{\mu_3}+\sqrt{\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\sqrt{\mu_3}-\sqrt{\mu_4}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times\sqrt{\mu_4}\left[\left(\sqrt{\mu_4}+\sqrt{\mu_3}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\sqrt{\mu_4}-\sqrt{\mu_3}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)=F_2, \qquad (11)$$

где, $F_2=F_1\Big/\left\{-\mu_3\mu_4\left(\lambda_1-\lambda_6\right)\left(\lambda_2-\lambda_6\right)\left(\lambda_3-\lambda_6\right)\left(\lambda_4-\lambda_6\right)\left(\lambda_5-\lambda_6\right)^2\right\}$.

Уравнение (11) можно переписать в виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\left(\mu_1-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}{\left(\mu_1+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times\left[\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\left(\mu_2-\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}{\left(\mu_2+\sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{\left(\sqrt{\mu_3}-\sqrt{\mu_4}\right)^2}{\left(\sqrt{\mu_3}+\sqrt{\mu_4}\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]\times\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)=F_3$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+c_1\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+c_2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-b^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=F_3$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-6| 2024 Published: |22-06-2024|

где, $c_1 = \dfrac{\left(\mu_1 - \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}{\left(\mu_1 + \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}$, $c_2 = \dfrac{\left(\mu_2 - \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}{\left(\mu_2 + \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)}$, $b^2 = \dfrac{\left(\sqrt{\mu_3} - \sqrt{\mu_4}\right)^2}{\left(\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4}\right)^2}$,

$$F_3 = F_2 \Big/ \left\{ \sqrt{\mu_3\mu_4}\left(\mu_1 + \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\left(\mu_2 + \sqrt{\mu_3\mu_4}\right)\left(\sqrt{\mu_3} + \sqrt{\mu_4}\right)^2 \right\}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть уравнение (6) имеет шесть различных действительных корня. Тогда уравнение (1) может быть приведено следующему каноническому виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + c_1\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + c_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - b^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) = F_3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка// Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27. № 10. С. 1734.

2. Джураев Т.Д.., Сопуев А. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными четвертого порядка//Узбекский математический журнал, 1994, №3.С. 7-21.

3. Уринов А., Абдукодиров А. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка// Материалы второй Международный Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». –Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С.251-254.

4. Уринов А., Абдукодиров А. О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с некратными характеристиками// Бюлетен Институт Математики. 2023. Т.6. №2. -С. 155-165.

5. Абдукодиров А. О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с кратными характеристиками// Бюлетен Институт Математики. 2023. Т.6. №4. -С. 100-107.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -Москва.: Наука, 1968.-432 с.