International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

https://doi.org/10.5281/zenodo.11126453

Каримов Шахобиддин Туйчибоевич
Профессор кафедры прикладной математики и информатики
Ферганского государственного университета
shaxkarimov@gmail.com
Юлдашева Ёкутхон Носировна
Магистр 2-курса факультета прикладной математики и информатики,
Ферганского государственного университета.
yuldashevashukrona@gmail.com

Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений по некоторой дополнительной информации об их решении представляют собой бурно развивающееся и актуальное научное направление в современной математической физике, в вычислительной и прикладной математике. Значительный интерес к обратным задачам для гиперболического уравнения главным образом обусловлен необходимостью решения актуальных проблем геофизики, медицинской диагностики, компьютерной томографии и т.д.

Математической предпосылкой развития теории коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений послужила работа И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана [1]. Статья М.Г.Крейна [2] описывает метод эффективного решения обратной краевой задачи. Так же среди ранее полученных наиболее важных результатов по определению коэффициента одномерной обратной задачи для уравнения гиперболического типа является монография В.Г.Романова [3], в которой изложены обратные задачи для уравнений математической физики, основным объектом исследования, которого является вопросы определения коэффициентов дифференциального уравнения по некоторым функционалам от его решения. В обратных задачах для гиперболических уравнений получен ряд теоретических результатов и разработаны различные методы их решения. В работе С.И. Кабанихина [4] предложены проекционно-разностные методы определения

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

коэффициентов гиперболических уравнений. В монографии С.И. Кабанихина [5] изложены результаты изучения прямой и обратной задачи с распределенными начальными данными, задача с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа. Доказана разрешимость в целом обратной задачи для уравнения гиперболического типа.

Данная работа посвящена решению коэффициентной обратной задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа, когда неизвестный коэффициент находится у производных второго порядка от искомой функции.

В области $x \geq 0,\ t > 0$ рассматривается уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$U_{tt} = a(x)U_{xx},\ a(x) > 0,\ x > 0,\ t > 0 \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями,

$$U\big|_{t<0} \equiv 0,\ U_x\big|_{x=0} = \alpha \cdot \delta(t),\ (t > 0), \qquad (2)$$

где $U = U(x,t),\ U_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U,\ U_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U,\ a(x)$ — неизвестная функция, δ(t)- дельта-функция Дирака, α - заданная константа.

Из соотношений (1), (2) определить неизвестную функцию $a(x)$ (переменный коэффициент уравнения (1) при старшей производной) по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2) вида

$$U(0,t) = f(t), t > 0. \qquad (3)$$

Математические модели обратных задач для дифференциальных уравнений и в частности математическая модель (1)-(3), являются универсальными и способны описывать процессы различной природы. В этом случае затруднительно сделать вывод о том, какой конкретно процесс описывается этой моделью.

Действительно, если в (1) функция $U(x,t)$ - смещение струны от положения равновесия, *x*-длина струны, *t*-время, а коэффициент $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, где T - натяжение струны, а ρ - плотность струны, то уравнение (1) может описывать малые поперечные колебания струны без воздействия внешних сил. Если же в (1) $U(x,t)$ - продольное смещение в момент времени t элемента стержня с координатой x от своего положения равновесия, $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, где E - модуль Юнга материала стерня, ρ - плотность стержня, то (1) будет описывать продольные колебания стержня постоянного поперечного сечения. Теперь пусть $U(x,t)$ - напряжение или сила тока в момент времени t на элементах проводов, имеющих координату x, $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$, где L и C -распределенные индуктивность и емкость проводов на единицу длины. Тогда (1) будет уже описывать распространение электрических возмущений в линии при отсутствии потерь.

И еще один пример. Пусть $U(x,t)$ - напряженность электрического или магнитного полей, $a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где с -скорость света в вакууме, ε и μ диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. В этом случае уравнение (1) описывает плоские электромагнитные волны в непроводящих средах.

Учитывая эти замечания, следует отметить, что методы исследования математических моделей обратных задач, их познавательный потенциал могут быть использованы при исследовании разнообразных по природе прикладных задач.

Теперь вернемся к обратной задаче (1)-(3) и для наглядности изложим вкратце схему ее исследования. При исследовании прямой задачи (1), (2) полагается, что $a(x)$ известная дважды непрерывно дифференцируемая функция в области $x \ge 0$. Прежде всего необходимо свести гиперболическое уравнение (1) к гиперболическому уравнению с единичными коэффициентами при старших производных.

Вначале вводится переменная y по формуле

$$y=\tau(x),\ \ \tau(x)=\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a(\xi)}} \tag{4}$$

Производные от функции $U=U\left(\tau^{-1}(y),\ t\right)$ *по переменной* x *выражаются через производные по переменной* y *с помощью формул*

$$\left.\begin{aligned} &U_x=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}U_y, \\ &U_{xx}=\frac{1}{a(x)}U_{yy}-\frac{a'(x)}{2\sqrt{a^3(x)}}U_y,\ \ x=\tau^{-1}(y) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В (5) $x=\tau^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $\tau(x)$.

Переменная x всегда может быть выражена через переменную y, так как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}>0,$$

и тогда $y=\tau(x)$ *- монотонно возрастающая функция.*

Подставляя (5) в (1), получим уравнение для функции U в новых переменных (y,t)

$$U_{tt}=U_{yy}-\frac{a'(\tau^{-1}(y))}{2\sqrt{a(\tau^{-1}(y))}}U_y, \qquad (6)$$

$$a'(\tau^{-1}(y))=\frac{d}{d\tau^{-1}(y)}a(\tau^{-1}(y))$$

Теперь введем новую функцию

$$V(y,t)=\frac{U(\tau^{-1}(y),t)}{S(y)} \qquad (7)$$

причем функция $S(y)$ подбирается из условия, чтобы уравнение для функции m,M,T имело вид

$$V_{tt}=V_{yy}+g(y)V,\ y>0,\ t\in R \qquad (8)$$

где функция $g(y)$ определится в дальнейшем.

Выразим производные от функции $U(\tau^{-1}(y),t)$ через производные от функции V:

$$\left.\begin{aligned}U_{tt}&=S(y)V_{tt},\\ U_y&=S(y)V_y+S'(y)V,\\ U_{yy}&=S(y)V_{yy}+2S'(y)V_y+S''(y)V\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Тогда из (8) нетрудно получить следующее уравнение:

$$V_{tt}=V_{yy}+\left(\frac{2S'(y)}{S(y)}-\frac{a'(\tau^{-1}(y))}{2\sqrt{a(\tau^{-1}(y))}}\right)V_y+$$
$$\left(\frac{S''(y)}{S(y)}-\frac{a'(\tau^{-1}(y))}{2\sqrt{a(\tau^{-1}(y))}}\cdot\frac{S'(y)}{S(y)}\right)V \qquad (10)$$

Вид функции $S(y)$ выбирается из условий

$$2\frac{S'(y)}{S(y)}-\frac{a'(\tau^{-1}(y))}{2\sqrt{a(\tau^{-1}(y))}}=0, S(+0)=1 \qquad (11)$$

и, следовательно,

$$S(y)=\exp\left(\frac{1}{4}\int_{+0}^{y}\frac{a'(\tau^{-1}(\xi))}{2\sqrt{a(\tau^{-1}(\xi))}}d\xi\right)=\sqrt[4]{\frac{a'(\tau^{-1}(y))}{a(+0)}} \qquad (12)$$

Тогда уравнение (10) принимает вид (8), где коэффициент $g(y)$, с учетом (11) имеет вид

$$g(y)=\left(\frac{S'(y)}{S(y)}\right)_y^{/}-\left(\frac{S'(y)}{S(y)}\right)^2 \qquad (13)$$

Условия (2) в терминах функции $V(y,t)$ принимают вид:

$$V\Big|_{t<0}\equiv 0,\ \ (S'(y)V+V_y)\Big|_{y=0}=\sqrt{a(0)}\cdot\alpha\cdot\delta(t) \qquad (14)$$

Таким образом, задача (1), (2) эквивалентна задаче (8), (14), в которой S,g определяются соотношениями (12), (13).

В дальнейшем выделив у функции V особенность

$$V(y,t)=\lambda(y)\theta(t-y)+V^*(y,t), \qquad (15)$$

где $V^*(y,t)$- непрерывная функция при переходе через поверхность $t=y, a\lambda(y)$ находится стандартным методом выделения особенностей [3; 5] и равна

$$\lambda(y)=-\alpha\cdot\sqrt{a(0)}\equiv\gamma \qquad (16)$$

γ - некоторая постоянная. Из (15) следует, что

$$V(y,y)=\gamma \qquad (17)$$

Так как $V\equiv 0$ при $t<y$ и $V=V^*$ при $t>y>0$, то, как нетрудно заметить, задача (8), (14) эквивалентна следующей задаче

$$V_{tt}=V_{yy}+g(y)V,\ (y,t)\in D \qquad (18)$$

$$V(y,y)=\gamma,\ \ (S'(y)V+V_y)\Big|_{y=0}=0 \qquad (19)$$

$$D=\{(y,t)|\ t>y>0\}$$

Исследование свойств функции $V(y,\ t)$ как решения прямой задачи (18), (19), может быть проведено по схеме, изложенной в [5]. В процессе реализации этой схемы исследования необходимо выявлять важные свойства функции $f(t)$ как о дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2),

$$f'(+0)-S'(+0)f(+0)=0,\ \ f(+0)=\gamma$$

которые позволяют вычислить $S'(+0)$ и $a(+0)$

$$S'(+0)=\frac{f'(+0)}{f(+0)},\ \ a(+0)=\frac{f^2(+0)}{\alpha^2} \qquad (20)$$

и приводят к необходимым условиям разрешимости обратной задачи

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

$$f(+0)=\gamma, \quad f(+0)\neq 0, \qquad \operatorname{sgn}(f(+0)) = -\operatorname{sgn}(a) \tag{21}$$

По завершении исследования прямой задачи (18), (19) необходимо выписывать дополнительную информацию о решении прямой задачи (18), (19), которая с учетом равенств (5), (7), (11) принимает вид

$$V(+0,t)=\frac{U(\tau^{-1}(y),t)}{S(y)}\Big|_{y=+0}=U(+0,t)=f(t) \tag{22}$$

затем приступить к исследованию обратной задачи (18), (19), (22). Исследование данной обратной задачи представляет собой построение замкнутой системы соответствующих интегральных уравнений Вольтера второго рода и доказательство локальной теоремы существования и единственности и теоремы условной устойчивости обратной задачи. Для наглядности в целях краткости записи сформулируем данные теоремы без доказательств, с которыми можно ознакомиться в [5].

Определение. Решением обратной задачи (18), (19), (22) будем называть функцию $g(y)$при $y>0$ такую, что решение прямой задачи (18), (19), отвечающее этой функции, удовлетворяет дополнительному условию (22).

Теорема 1. Пусть $f(t)\in \underline{C}^2(0,T))$ и удовлетворяет соотношениям (20), (21). Тогда если $T>0$ и мало, то решение обратной задачи (18), (19), (22) существует, единственно и принадлежит классу, $C[0, T/2]$.

Теорема 2. Пусть z, T — фиксированные положительные числа; для функции $f(t)\in C^2(0,T)$ выполнены соотношения (20), (21); функция $g(y)$ принадлежит классу непрерывных функций на отрезке $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ и является решением обратной задачи (18), (19), (22) с информацией $f(t),\, t\in(0,T)$. Тогда для достаточно малого $T > 0$ существует функция $a(x)\in L=\{a(x)\in C[0,z] \| a(x)>0\}$являющаяся решением обратной задачи (1)-(3), где $z=\tau^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)=\sqrt{a(+0)}\int_0^{T/2} S^2(\xi)d\xi$, а $S(y)$ *и* $g(y)$ определяются формулой (13).

Пусть m, M, T - фиксированные положительные числа, $m\le M$, $\wp=\frac{T}{2\sqrt{m}}$.

Обозначим через $Q(m,M,\sqrt{a(+0)})$ - множество функций a из класса $\Lambda_1(m,M,\wp)=\left\{a(x)\in C^2[0,\wp] \Big| \|a\|_{C^2[0,\wp]}\le M,\ a(x)\ge m\right\}$.

Теорема 3. Пусть функции $a\in Q\left(m,M,\sqrt{a(+0)}\right)$ соответствует информация

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

$f(t) \in C^2(0,T)$ о решении прямой задачи (1), (2), а функции $\bar{a} \in Q\left(m, M, \sqrt{a(+0)}\right)$ – информация $\bar{f}(t) \in C^2(0,T)$. Тогда для каждого $T > 0$ существует такая положительная постоянная $C = C(m, M, \sqrt{a(+0)})$, что

$$\left\|a(x) - \bar{a}(x)\right\|_{C[0,L]} \le C \cdot \left\|f(t) - \bar{f}(t)\right\|_{C^2[0,L]}, \; L = \frac{T \cdot \sqrt{M}}{2}.$$

Коэффициентные обратные задачи для дифференциальных уравнений являются нелинейными, что не позволяет получить их точное решение. Тогда обычно строится система уравнений обратной задачи, как правило, в виде интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, решение которой ищется при помощи итерационных процессов, которые подразумевают многократное решение соответствующих прямых задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН, сер. матем. - 1951. - Т.15.- С. 309-360.

2. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. - 1954. - Т.94, № 6. - С. 767-770.

3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. -263 с.

4. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициента гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.- 168 с.

5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

6. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.

7. Каримов Ш.Т., Юлбарсов Х. Задача Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, 12 - 15 сентября, Стерлитамак, 2021 г.

8. Каримов Ш.Т., Мамадалиева Ш. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению

Гелфанда-Левитана первого рода. Fars Int J Edu Soc Sci Hum 10(12), 2022; Volume-10, Issue-12, pp. 142-151.

9. Каримов Ш.Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложение. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). С. 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40.

10. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения. Доклады АН РУз. – 2014. -№ 5 -С. 11-13