International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

https://doi.org/10.5281/zenodo.11111857

Абдукодиров Абдурашид Толибжонович.
Ферганский Государственный Университет доцент
Рахмонова Мехрихон Яхё кизи
Ферганский Государственный Университет магистрант (математика) .

Аннотация

В данной работе для одного уравнения гиперболического типа исследуются некоторые краевые задачи с нелокальным условием, связывающие значения искомой функции на двух характеристиках разного семейства, лежащих в одной полуплоскости. Исследована единственность решениея задачи.

Ushbu maqolada giperbolik tipdagi bir tenglama uchun bitta yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma'lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masalalarni tadqiq etilgan. Masala yechimining yagonaligi o'rganilgan.

В этой статье для уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} - \frac{\alpha}{y} U_y = 0 \qquad (1)$$

в области D , ограниченной характеристиками

$AC_1 : x + y = 0, \quad BC_1 : x - y = 1,$

$AC_2 : x - y = 0, \quad BC_2 : x + y = 1,$

исследуются некоторые краевые задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции на двух характеристиках разного семейства, лежащих в одной полуплоскости.

Причем предположим, что $0 < \alpha = const < 1$ и воспользуемся обозначениями

Рассмотрим уравнение (1) в области D_j ($j = 1$ или $j = 2$). Известно, что задача Коши с начальными условиями

$$U(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1; \qquad U_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \qquad (2)$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – заданные функции, для уравнения (1) в области D_j при $\alpha = 0$ поставлена корректно[9]. Эта задача для уравнения (1) при $\alpha \neq 0$ поставлена некорректно. Справедливость этого утверждения при $\alpha < 0$ следует из существования нетривиальных функций вида $U_1(x,y) = C \cdot |y|^{1-\alpha}$ удовлетворяющих уравнению (1) в области D_j и однородным начальным условиям $U(x,0) = 0$, $U_y(x,0) = 0$, где $C \in R, C \neq 0$.

Некорректность при $\alpha > 0$ заключается в том, что задача Коши с начальными условиями (2) для уравнения (1) в области D_j не всегда разрешима и можно доказать, что при $\alpha > 0$ не существует решения задачи Коши с начальными условиями на линии $y = 0$ для уравнения (1) в области D_j, когда заданная функция $\nu(x) = \lim_{y\to 0} U_y(x,y) \not\equiv 0$ непрерывна.

Корректно поставлена следующая **видоизмененная задача Коши:** найти регулярное в области D_j ($j = 1$ или $j = 2$) решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}_j$ и удовлетворяющее условиям

$$U(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1; \ \lim_{|y|\to 0} |y|^{\alpha} U_y(x,y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ –заданные функции, причем здесь требуется непрерывность выражения $|y|^{\alpha} U_y(x,y)$ в области D_j вплоть до отрезка AB.

Если $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C^2(0,1)$, то решение видоизмененной задачи Коши существует, единственно и определяется формулой

$$U(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x + \sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{\beta-1} dz +$$

$$+(-1)^j |y|^{1-\alpha} \gamma_2 \int_0^1 \nu\left[x + \sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{-\beta} dz, \quad (4)$$

где, $\beta = \alpha/2$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\left[(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)\right]$, $\sigma = |y|$, $(x,y) \in D_j$, $j = 1,2$, причем $\nu(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0$ и $x \to 1$. Далее, нетрудно убедиться, что функция $U(x,y)$, определяемая формулой (4) действительно непрерывно зависит от начальных данных.

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

Пусть θ_{0j} и θ_{1j} - точки пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,0)\in AB$, с характеристиками AC_j и BC_j соответственно, т.е.:

$$\theta_{0j}\left(\frac{x}{2},(-1)^j\frac{x}{2}\right),\theta_{1j}\left(\frac{x+1}{2},(-1)^j\frac{1-x}{2}\right),\ j=1,2.$$

Задача $\Gamma_{\beta,\beta}$. Найти функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_1\cup D_2)$;

2) для любого $x\in(0,1)$ существуют $\lim\limits_{y\to\pm0}|y|^\alpha U_y(x,y)$ и выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^\alpha U_y(x,y)=\lim_{y\to+0}y^\alpha U_y(x,y),\quad 0<x<1; \tag{5}$$

3) в областях D_1 и D_2 удовлетворяет уравнению (1);

4) удовлетворяет краевым условиям

$$a_j(x)D_{0x}^{\beta}\left[x^{2\beta-1}U(\theta_{0j})\right]+b_j(x)D_{1x}^{\beta}\left[(1-x)^{2\beta-1}U(\theta_{1j})\right]+c_j(x)U(x,0)=$$
$$=d_j(x),\ 0\le x\le1,\ \ j=1,2, \tag{6}$$

где $a_j(x),b_j(x),d_j(x),c_j(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$ –заданные функции, причем $a_j^2(x)+b_j^2(x)+c_j^2(x)\neq0$, $j=1,2$.

Заметим, что (6) являются краевыми условиями типа условий, впервые предложенных А.М. Нахушевым для уравнения Трикоми в [1]. Они связывают значения искомой функции на двух характеристиках разного семейства, расположенных в одной полуплоскости. Из задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$, в частном случае при $b_1(x)\equiv a_2(x)\equiv0$, $c_j(x)\equiv0$ следует краевая задача, значения искомой функции которой заданы на характеристиках AC_1 и BC_2. Такая задача для уравнения Геллерстедта и для гиперболического уравнения с вырождением типа порядка была изучена в работах [2-5]. Кроме того, из задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$ при $a_j(x)\equiv0$ или $b_j(x)\equiv0,\ j=1,2,\ c_j(x)\equiv0$ следует задача Гурса для уравнения (1) в D.

Предположим , что существует решение $U(x,y)$ задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$. Введем обозначения: $U(x,0)=\tau(x),\lim\limits_{|y|\to0}|y|^\alpha U_y(x,y)=\nu(x)$. Пусть $\tau(x)\in C[0,1]\cap$ $\cap C^2(0,1),\ \nu(x)\in C^2(0,1)$ и $\nu(x)$, может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to0$ и $x\to1$. Тогда функция $U(x,y)$ в

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

области D_j ($j=1,2$) как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) , представима в виде

$$U(x,y)=\gamma_1\int_0^1 \tau\left[x+\sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{\beta-1}dz+$$

$$+(-1)^j|y|^{1-\alpha}\gamma_2\int_0^1 \nu\left[x+\sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{-\beta}dz\,, \quad (7)$$

Так как эта функция должна удовлетворять условиям (1.31_j), то подставляя (7) в (6), находим функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенные из областей D_j, $j=1,2$. С этой целью из (7) находим

$$U(\theta_{0j})=\gamma_1 x^{1-2\beta}\int_0^x \tau(t)\left[t(x-t)\right]^{\beta-1}dt$$

$$+\ (-1)^j\gamma_3\int_0^x \nu(t)\left[t(x-t)\right]^{-\beta}dt,\ 0\le x\le 1,\ j=1,2, \qquad (8)$$

$$U(\theta_{1j})=\gamma_1(1-x)^{1-2\beta}\int_x^1 \tau(t)\left[(t-x)(1-t)\right]^{\beta-1}dt+$$

$$+\ (-1)^j\gamma_3\int_x^1 \nu(t)\left[(t-x)(1-t)\right]^{-\beta}dt, 0\le x\le 1,\ j=1,2,\ (9)$$

где $\gamma_3=\gamma_2[1/2]^{1-2\beta}$. Подставляя (8), (9) в краевые условия (6), $j=1,2$ и после несложных вычислений, находим

$$p_j(x)\tau(x)=[x(1-x)]^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]d_j(x)-$$

$$-(-1)^j a_j(x)(1-x)^{1-\beta}\gamma_4\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt- \qquad (10)$$

$$-\ (-1)^j b_j(x)x^{1-\beta}\gamma_4\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt,\ 0\le x\le 1,\ j=1,2,$$

где $p_j(x)=(1-x)^{1-\beta}a_j(x)+x^{1-\beta}b_j(x)+(1-x)^{1-\beta}x^{1-\beta}c_j(x)$, $j=1,2$.

Равенства (10) являются основными функциональными соотношениями между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенными из областей D_j, $j=1,2$.

Следовательно, задача $\Gamma_{\beta,\beta'}$ в смысле разрешимости эквивалентна системе уравнений (10). Если из этой системы однозначно найдём функции

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-5| 2024 Published: |22-05-2024|

$\tau(x)$ и $\nu(x)$ с требуемыми свойствами, то решение задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$ в областях D_j, $j=1,2$ определяется формулами (7). При исследовании единственности и существования решения задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$ (системы (10)) рассмотрим следующие случаи: $a_j(x)\equiv 0$ $(\text{или } b_j(x)\equiv 0)$, $j=1,2$; $a_j(x)\equiv 0$, $b_k(x)\equiv 0$, $j\neq k$, $j,k=1,2$; $a_j(x)\equiv 0$ $(b_j(x)\equiv 0)$, $a_k(x)\not\equiv 0$, $b_k(x)\not\equiv 0$, $p_k(x)\neq 0$, $j\neq k$, $j,k=1,2$; $a_j(x)=x^{1-\beta}c_j(x)$, $b_j(x)=(1-x)^{1-\beta}e_j(x)$, $c_j(x)\cdot e_j(x)\neq 0$, $c_j(x)+e_j(x)\neq 0$, $j=1,2$.

Для доказательства единственности решения задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$, рассмотрим однородную задачу $\Gamma_{\beta,\beta}$, т.е. задачу $\Gamma_{\beta,\beta}$ при $d_j(x)\equiv 0$, $j=1,2$. Если докажем, что это задача имеет только тривиальное решение, то этим будет доказана единственность решения задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$.

Пусть $U(x,y)$– решение однородной задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$ и $\tau(x)=U(x,0)$, $\nu(x)=\lim\limits_{|y|\to 0}|y|^{\alpha}U(x,y)$. Тогда, согласно (10), справедливы равенства

$$p_j(x)\tau(x)=(-1)^{j+1}a_j(x)(1-x)^{1-\beta}\gamma_4\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt+$$

$$+\ (-1)^{j+1}b_j(x)x^{1-\beta}\gamma_4\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt,\quad 0\le x\le 1,\ j=1,2.(11)$$

Рассмотрим случаи $a_j(x)\equiv 0$ $(\text{или } b_j(x)\equiv 0)$, $j=1,2$. Имеет место

Теорема. Пусть выполнены условия $a_j(x)\equiv 0, b_j(x)\neq 0$ (или $b_j(x)\equiv 0, a_j(x)\neq 0$), $j=1,2$. Тогда, если существует решение задачи $\Gamma_{\beta,\beta}$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, например, $a_j(x)\equiv 0$, $j=1,2$. Тогда из (11) имеем

$$\left(1+\frac{(1-x)^{1-\beta}c_j(x)}{b_j(x)}\right)\tau(x)=(-1)^{j+1}\gamma_4\int_x^1 \nu(t)\,(t-x)^{-2\beta}\,dt,\ j=1,2.\qquad(12)$$

Складывая почленно равенства, полученные из (12) при j=1 и j=2, находим, $\tau(x)\equiv 0$. Учитывая это, из (12) получим интегральное уравнение относительно $\nu(x)$:

$$\int_x^1 v(t)\,(t-x)^{-2\beta}\,dt = 0.$$

Решение этого уравнения в классе функций, которые непрерывны в $(0,1)$ могут иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0$ и $x \to 1$, и тождественно равны нулю. Тогда, в силу формулы (7), $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_j$, $j=1,2$, т.е. $U(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. Случай $b_j(x) \equiv 0$, $j=1,2$ исследуется аналогично.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.// Дифференциальные уравнения .- 1969.-Т.5. №1- С. 44-59.

2.Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. // Дифференциальные уравнения .-1978.-Т. 14. №1 - С. 50-65.

3.Абдукодиров А.Т. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент,2004.-С. 17-21.

4.Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. О единственности решения краевой задачи для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент, 2004.-С. 172-175.

1.Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Республиканская науч. конферен. молодых ученых: Ташкент, 2004.-С.65-68.