International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-12| 2024 Published: |22-12-2024|

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ, ЛЕЖАЩИХ В РАЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

https://doi.org/10.5281/zenodo.14552986

Абдукодиров Абдурашид Толибжонович.
Ферганский Государственный Университет доцент
Рахмонова Мехрихон Яхё кизи
Ферганский Государственный Университет магистрант (математика)

Аннотация

В данной работе для одного уравнения гиперболического типа исследуются некоторые краевые задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции на двух характеристиках, лежащих в разных полуплоскостях. Доказывается единственность решение задачи.

Ushbu maqolada giperbolik tipdagi bir tenglama uchun turli yarim tekislikda joylashgan ikkita xarakteristikalardagi noma'lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masalalarni tadqiq etilgan. Masala yechimining yagonaligi isbotlangan.

In this paper, for one equation of hyperbolic type, some boundary value problems with a nonlocal condition connecting the values of the sought function on two characteristics lying in different half-planes are investigated. The uniqueness of the solution to the problem is proven.

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} - U_{yy} - \frac{\alpha}{|y|} \cdot signy \cdot U_y = 0 \qquad (1)$$

в области D, ограниченной характеристиками

$AC_1 : x + y = 0, \quad BC_1 : x - y = 1,$

$AC_2 : x - y = 0, \quad BC_2 : x + y = 1,$

исследуются некоторые краевые задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции на двух характеристиках, лежащих в разных полуплоскости.

Причем предположим, что $0 < \alpha = const < 1$ и воспользуемся обозначениями

$D_1 = D\cap\{y<0\}$, $D_2 = D\cap\{y>0\}$, $AB = D\cap\{y=0\}, \beta=\alpha/2$,
$\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/[(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)]$, $\sigma=|y|$.

Пусть θ_{0j} и θ_{1j} - точки пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,0)\in AB$,с характеристиками AC_j и BC_j соответственно, т.е.:

$$\theta_{0j}\left(\frac{x}{2},(-1)^j\frac{x}{2}\right),\theta_{1j}\left(\frac{x+1}{2},(-1)^j\frac{1-x}{2}\right),\ j=1,2.$$

Задача Γ_β^β. Найти функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_1\cup D_2)$;

2) для любого $x\in(0,1)$ существуют $\lim\limits_{y\to\pm 0}|y|^\alpha U_y(x,y)$ и выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^\alpha U_y(x,y)=\lim_{y\to +0}y^\alpha U_y(x,y),\qquad 0<x<1;$$

3) в областях D_1 и D_2 удовлетворяет уравнению (1);

4) удовлетворяет краевым условиям

$$a_1(x)D_{ox}^\beta\left[x^{2\beta-1}U(\theta_{01})\right]+a_2(x)D_{ox}^\beta\left[x^{2\beta-1}U(\theta_{02})\right]+c_1(x)U(x,0)=d_1(x),\qquad(2)$$

$$b_1(x)D_{1x}^\beta\left[(1-x)^{2\beta-1}U(\theta_{11})\right]+b_2(x)D_{1x}^\beta\left[(1-x)^{2\beta-1}U(\theta_{12})\right]+c_2(x)U(x,0)=d_2(x),\qquad(3)$$

где $0\le x\le 1$, $a_j(x),b_j(x),d_j(x),c_j(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$ – заданные функции, причем $a_1^2(x)+a_2^2(x)\ne 0, b_1^2(x)+b_2^2(x)\ne 0,\ c_j(x)\ne 0$, $0\le x\le 1$, а θ_{0j} и θ_{1j} – являются точками пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in AB$, с характеристиками AC_j и BC_j соответственно, т.е.

$$\theta_{0j}\left(\frac{x}{2},(-1)^j\frac{x}{2}\right),\theta_{1j}\left(\frac{x+1}{2},(-1)^j\frac{1-x}{2}\right),j=1,2.$$

Так как точки θ_{0j} и θ_{1j} ($j=1,2$) лежат в разных полуплоскостях, то (2) и (3) – являются нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции на характеристиках, лежащих в различных полуплоскостях. Из этой задачи, в частном случае, следует задача Гурса для уравнения (1) в D и задача, значение искомой функции которое задано на противоположных сторонах характеристического четырехугольника. Такая задача для уравнения Геллерстедта и для гиперболического уравнения с вырождением типа порядка была изучена в работах [2-5]. В работе [6] для уравнения (1) исследовано краевые задача с нелокальным условием, связывающие значения искомой функции на двух характеристиках разного семейства, лежащих в одной полуплоскости.

Нетрудно убедится, что решение видоизмененной задачи Коши для уравнение (1) с начальными данными $U(x,0)=\tau(x)$, $0 \le x \le 1$; $\lim\limits_{|y|\to 0}|y|^{\alpha}U_y(x,y) = \nu(x)$, $0 < x < 1$, существует, единственно и определяется формулой [1]:

$$U(x,y)=\gamma_1\int_0^1 \tau\left[x+\sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{\beta-1}dz+$$

$$+(-1)^j|y|^{1-\alpha}\gamma_2\int_0^1 \nu\left[x+\sigma(2z-1)\right]\left[z(1-z)\right]^{-\beta}dz\,, \quad (4)$$

где, $(x,y)\in D_j, j=1,2,$ $\tau(x)$ и $\nu(x)$– обладают свойствами $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \nu(x)\in C^2(0,1)$, $\left[x(1-x)\right]^{-2\beta}\nu(x)\in L_1(0,1)$.

Решение задачи Γ_{β}^{β} ищем в виде (4), где $\tau(x)$ и $\nu(x)$– неизвестные функции, которые подлежат определению. Функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ определим таким образом, чтобы функция (4) удовлетворяла краевым условиям (2) и (3). Так как эта функция должна удовлетворять условиям (2) и (3), то подставляя (4) в (2) и (3), находим функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенные из областей D_j, $j=1,2$.

С этой целью из (4) при $0 \le x \le 1$, находим

$$U\left(\theta_{0j}\right)=\gamma_1 x^{1-2\beta}\int_0^x \tau(t)\left[t(x-t)\right]^{\beta-1}dt+(-1)^j\gamma_3\int_0^x \nu(t)\left[t(x-t)\right]^{-\beta}dt\,, \quad (5)$$

$$U\left(\theta_{1j}\right)=\gamma_1(1-x)^{1-2\beta}\int_x^1 \tau(t)\left[(t-x)(1-t)\right]^{\beta-1}dt$$

$$+(-1)^j\gamma_3\int_x^1 \nu(t)\left[(t-x)(1-t)\right]^{-\beta}dt\,, \quad (6)$$

где $j=1,2$, $\gamma_3=\gamma_2\left[1/2\right]^{1-2\beta}$. Подставляя (5), (6) в краевые условия (2), (3) и после несложных вычислений, находим

$$[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]]\tau(x)=d_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]+$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-12| 2024 Published: |22-12-2024|

$$+\gamma_4[a_1(x)-a_2(x)]\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt,\ 0\le x\le 1; \qquad (7)$$

$$[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]]\tau(x)=d_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]+$$

$$+\gamma_4[b_1(x)-b_2(x)]\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt,\ \ 0\le x\le 1, \qquad (8)$$

где $\gamma_4=2^{2\beta}\,\Gamma(\beta)\big/\left[2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)\right]$. Равенства (7) и (8) являются основными функциональными соотношениями между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенные из областей D_1 и D_2 соответственно.

Следовательно, задача Γ_β^β, в смысле разрешимости, эквивалентна системе (7) и (8). Если из этой системы однозначно найдём функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ с требуемыми свойствами, то решение задачи Γ_β^β в областях D_j $j=1,2$ определяется формулами (4).

Теорема. Пусть выполнена одна из следующих групп условий.

1) $a_1(x)-a_2(x)=0, b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]=\ ,$

$[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]][b_1(x)-b_2(x)]\neq 0$; (9)

2) $a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]=0, b_1(x)-b_2(x)=0,$

$[a_1(x)-a_2(x)][b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\neq 0$; (10)

3) $[b_1(x)-b_2(x)]\left[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]\neq 0,$

$a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\neq 0,$ $a_1(x)-a_2(x)=0;$
(11)

4) $\left[a_1(x)-a_2(x)\right]\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]\neq 0,$

$[b_1(x)-b_2(x)]\neq 0\left[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]=0$; (12)

5) $[a_1(x)-a_2(x)]\neq 0\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]=0,$

$[b_1(x)-b_2(x)]\neq 0,\ b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\neq 0$; (13)

6) $b_1(x)-b_2(x)=0,\quad b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\neq 0,$

$\left[a_1(x)-a_2(x)\right]\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]\neq 0$; (14)

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-12| 2024 Published: |22-12-2024|

7) $$\left[a_1(x)-a_2(x)\right]\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]\neq 0,$$

$$\left[b_1(x)-b_2(x)\right]\left[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right]\neq 0; \qquad (15)$$

$$a(1)>0, \quad a'(x)\le 0, \quad 0\le x\le 1, \qquad (16)$$

$$b(0)<0, \quad b'(x)\le 0, \quad 0\le x\le 1, \qquad (17)$$

(или $a(1)<0, b(0)>0, \quad a'(x)\ge 0, \quad b'(x)\ge 0, \quad 0\le x\le 1$), (18)

$$a_j(x), b_j(x), d_j(x)\in C^1[0,1], \quad j=1,2, \qquad (19)$$

где $$a(x)=\left[a_1(x)-a_2(x)\right]\Big/\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right],$$

$$b(x)=\left[b_1(x)-b_2(x)\right]\Big/\left[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right]\right].$$

Тогда, если существует решение задачи Γ_β^β, то оно единственно.

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи Γ_β^β, рассмотрим однородную задачу Γ_β^β, т.е. задачу Γ_β^β при $d_j(x)\equiv 0, \quad j=1,2$. Если докажем, что это задача имеет только тривиальное решение, то этим будет доказана единственность решения задачи Γ_β^β.

Пусть $U(x,y)$– решение однородной задачи Γ_β^β. Тогда, согласно (2) и (3), при $0\le x\le 1$ справедливы равенства

$$\left[a_1(x)+a_2(x)+c_1(x)x^{1-\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\right]\tau(x)=\gamma_4[a_1(x)-a_2(x)]\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt, \qquad (20)$$

$$\left[b_1(x)+b_2(x)+c_2(x)(1-x)^{1-\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\right]\tau(x)=\gamma_4[b_1(x)-b_2(x)]\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt. \qquad (21)$$

Если докажем, что система (20), (21) имеет только тривиальное решение, то этим будет доказана единственность решения задачи Γ_β^β.

Пусть выполнены условия (9). Тогда из (20) и (21) соответственно, получим $\tau(x)\equiv 0$ и

$$\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt=0, \qquad 0\le x\le 1. \qquad (22)$$

Решение уравнения (22) тождественно равно нулю, в классе функций, которые непрерывны в (0,1) и могут иметь особенность порядка меньше 1-2β при $x \to 0$ и $x \to 1$. Следовательно $\tau(x) \equiv \nu(x) \equiv 0$, $0 \le x \le 1$.

Аналогично доказывается, что $\tau(x) \equiv \nu(x) \equiv 0$, $0 \le x \le 1$ и в том случае, когда функции $a_j(x), b_j(x)$, $j = 1,2$ удовлетворяют одному из условий (10) – (14).

Пусть, теперь, выполнены условия (15),(16),(17). Тогда равенства (20) и (21) можно переписать в виде

$$\tau(x) = \gamma_4 a(x) \int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta} dt, \quad 0 \le x \le 1; \qquad (23)$$

$$\tau(x) = \gamma_4 b(x) \int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta} dt, \quad 0 \le x \le 1. \qquad (24)$$

Докажем, что

$$l = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = 0. \qquad (25)$$

Подставляя (23) в (25) и заменяя функции $|x-t|^{-2\beta}$ по формуле $|x-t|^{-2\beta} = \dfrac{1}{\Gamma(2\beta)\cdot\cos\beta\pi} \int_0^\infty z^{2\beta-1} \cos z(x-t) dz$, имеем

$$l = \gamma_5 \int_0^\infty z^{2\beta-1} dz \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1+2\beta}{2}} d\xi \int_0^1 a(x)\nu(x)dx \int_0^x \nu(t)\cos z(x-t)dt. \quad (26)$$

Пользуясь формулой $\cos(x\text{-}y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, находим

$$\nu(x)\nu(t)\cos z(x-t) = \sum_{i=1}^2 \nu_i(x,\xi,z)\nu_i(t,\xi,z), \qquad (27)$$

где

$$\nu_1(x,z,\xi) = \nu(x)\cdot\cos zx, \ \nu_2(x,z,\xi) = \nu(x)\cdot\sin zx. \qquad (28)$$

Интегрируя (27) по t и учитывая равенства

$$\int_0^x f(x)f(t)dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2,$$

получим

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-12| 2024 Published: |22-12-2024|

$$\int_0^x v(x)v(t)\cos z(x-t)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^x v_i(t,\xi,z)dt\right)^2. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (26) , имеем

$$l=\frac{\gamma_5}{2}\int_0^\infty z^{2\beta-1}dz\int_{-1}^{1}(1-\xi)^{-\frac{1+2\beta}{2}}d\xi\left\{a(1)\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^1 v_k(t,\xi,z)dt\right)^2-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 a'(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^x v_k(t,\xi,z)dt\right)^2 dx\right\}, \quad (30)$$

где $v_k(t,\xi,z)\ \ (k=1,2)$ – функции, определяемые формулами (28).

В силу условий (16) из (30) следует, что $l\geq 0$.

Аналогично, используя соотношение (24), находим

$$l=\frac{\gamma_5}{2}\int_0^\infty z^{2\beta-1}dz\int_{-1}^{1}(1-\xi)^{-\frac{1+2\beta}{2}}d\xi\left\{b(0)\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^1 v_k(t,\xi,z)dt\right)^2+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 b'(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\int_x^1 v_k(t,\xi,z)dt\right)^2 dx\right\}. \quad (31)$$

В силу условий (17) из (31) следует, что $l\leq 0$. Следовательно, l=0. Точно также можно доказать, что l=0, когда выполнены условия (18).

Если учесть, что l=0, из (31), находим, что справедливы равенства

$$\int_0^1 v(t)\cos zt\,dt=0,\ \int_0^1 v(t)\sin zt\,dt=0. \quad (32)$$

Равенства (32) справедливы для всех значений $z\in(-\infty;+\infty)$, и в частности, при $z=m\pi$ (m=0,1,2,…). При этих значениях z функции $\cos zt$ и $\sin zt$ образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$. Поэтому из (32) следует, что коэффициенты Фурье (по этой системе) функции $v(x)$ равны нулю. Тогда, согласно уравнению замкнутости [7], справедливо равенство $\int_0^1 v^2(t)\,dt=0$, откуда следует, что $v(x)\equiv 0$, $x\in(0,1)$. Подставляя это в (20) или (21), находим, что $\tau(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Тогда, из (4) следует, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, и, следовательно, в $\overline{D}$.

Теорема доказана.

FARS PUBLISHERS
Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-12| 2024 Published: |22-12-2024|

ЛИТЕРАТУРА

1.Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Математический сборник.-1952.-Т.30 (72).№1.-С.11-38.

2.Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. // Дифференциальные уравнения .-1978.-Т. 14. №1 - С. 50-65.

3.Абдукодиров А.Т. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент,2004.-С. 17-21.

4.Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. О единственности решения краевой задачи для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент, 2004.-С. 172-175.

1.Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Республиканская науч. конферен. молодых ученых: Ташкент, 2004.-С.65-68.

2.Абдукодиров А.Т., Рахмонова М.Я. О единственности решения краевых задач с нелокальным условием на характеристиках, лежащих в одной полуплоскости.// International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers .2024. Vol.12. Issue-5. pp. 134-139

3.Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. -М.: Наука, 1968. -464 с.