International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

FUNKSIYA GRAFIGINING XARAKTERLI NUQTALARI VA SIMMETRIYA O'QLARI.

https://doi.org/10.5281/zenodo.14237559

Asqaraliyeva Muhtasar Azizjon qizi
QDPI o'qituvchi
O'rinboyeva Nazokat Baxtiyor qizi
QDPI talaba
asqaraliyevamuxtasar@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu maqolada funksiya grafigining kordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari, Funksiya aniqlanish sohasining chegaradagi limitik qiymati, funksiyaga ekstremum beruvchi nuqtalar, Funksiya grafigining egilish (bukilish) nuqtalari haqida yoritilgan.

Kalit so'zlar

funksiya,limit,nuqta,chegara,koordinata,grafik.

Funksiya grafigining xarakterli nuqtalariga quyidagi nuqtalar kiradi: funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari, funksiya aniqlanish sohasining chegaralaridagi limitik qiymati, funksiyaga ekstremum beruvchi nuqtalar, funksiyaning nollari, egilish (bukilish) nuqtalari.Ayrimlarini keltirib o'tamiz.

1. Funksiyaga ekstremum beruvchi nuqtalar. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a;b)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x_0 \in (a;b)$ nuqtaning shunday

$$U_\delta(x_0) = \{x : x \in R^1, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\} \subset (a;b)$$

atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \le f(x_0) \ \ (f(x) \ge f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) ega deyiladi. $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ to'plamdagi lokal maksimumi (lokal minimumi) deyiladi.

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

2-ta'rif. Agar $x_0 \in (a;b)$ nuqtaning shunday $U_\delta(x_0) \in (a;b)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy lokal maksimumga (qat'iy lokal minimumga) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi qat'iy lokal maksimumi (qat'iy lokal minimumi) deyiladi.

Bu holda x_0 son funksiyaga, mos ravishda, lokal maksimum (lokal minimum), qat'iy lokal maksimum (qat'iy lokal minimum) qiymat beradigan nuqta deb ataladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi lokal maksimum (lokal minimum) qiymatlari

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \qquad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\})$$

kabi belgilanadi. Bunday max (min) lotincha maximum (minimum) so'zidan olingan bo'lib eng katta (eng kichik) degan ma'noni anglatadi.

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan ekstremum qiymatlar deyiladi. (Ekstremum - extremum - lotincha chetki qiymat, demakdir).

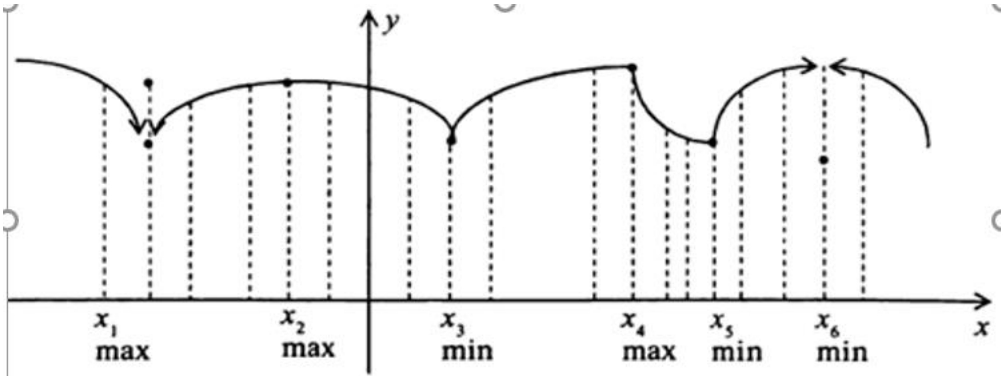
Funksiyaning ekstremum nuqtalarini topishda quyidagi hollarga alohida e'tibor berish zarur.

1-hol. Agar funksiya $[a;b]$ kesmada berilgan bo'lsa, funksiyaning ekstremum nuqtasi kesmaning chegara nuqtasi ham, ichki nuqtasi ham bo'lishi mumkin.

2-hol. Ekstremumga ega bo'lgan funksiya monoton bo'lmaydi. Monoton ozgaruvchi funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Masalan, $y = kx + b$ funksiya $k > 0$ bo'lganda monoton o'suvchi, $k < 0$ bo'lganda esa monoton kamayuvchi bo'lgani uchun ekstremumga ega emas.

3-hol. Funksiyaning ekstremum nuqtasi (ekstremum qiymatlari) bir nechta va hatto cheksiz ko'p ham bo'lishi mumkin. Funksiya uzliksiz bo'lganda, uning maksimum va minimum qiymatlari o'zaro almashinib keladi.(1-rasm)



1-rasm

Eslatma. Agar funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsa, funksiyaning $x=a$ yoki $x=b$ nuqtalaridagi lokal maksimumi yoki lokal minimumi haqida so‘z yuritib bo‘lmaydi, chunki $x=a$ nuqtadan chapda va $x=b$ nuqtadan o‘ngda funksiya aniqlanmagan.

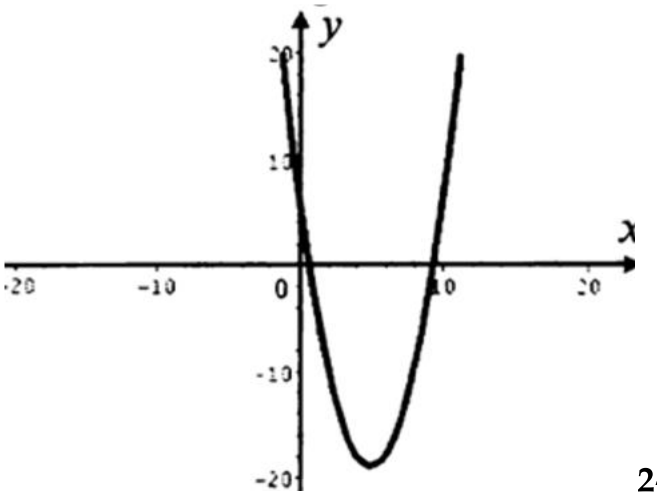
1-misol. $f(x)=x^2-10x+6$ funksiyaning ekstremum nuqtasi va ekstremum qiymatini toping.

Yechish. Berilgan kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratamiz:

$f(x)=(x-5)^2-19$.

$x_0=5$ bo‘lganda $f(x_0)=-19$, $x_0\neq 5$ bo‘lganda esa $(x_0-5)^2>0$ va $f(x)=(x-5)^2-19>-19=f(x_0)$ bo‘ladi.

Demak, $x_0=5$ nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi, $f(x_0)=-19$ esa uning ekstremum qiymati bo‘ladi. (2-rasm).



2-rasm

Biz yuqorida funksiyaning ekstremumlari va funksiya biror oraliqda bir nechta maksimum va minimumlariga ega bo‘lishi mumkinligi to‘g‘risida aytib o‘tdik. Endi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalasini qaraymiz.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo‘ladi va bu qiymatlarga funksiya $[a;b]$ kesmaning nuqtalarida erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta eng kichik qiymatlarini topish uchun (3-rasm):

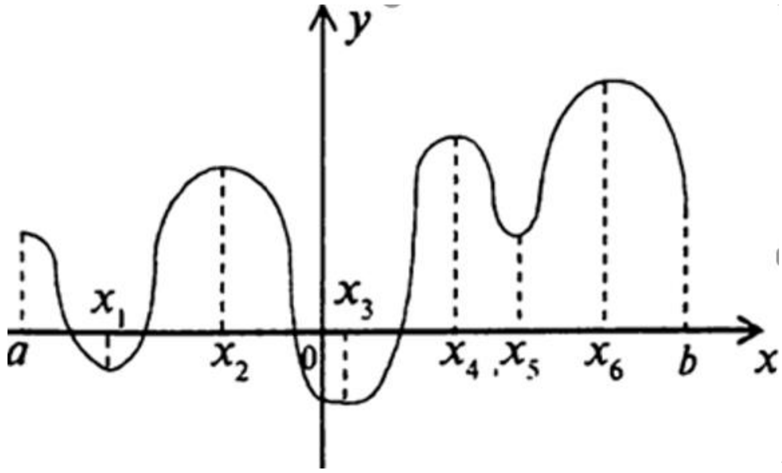
1) $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ dagi barcha maksimum va minimumlari topiladi;

2) $f(x)$ funksiyaning $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari topiladi;

3) maksimumlar ning eng kattasi bilan $f(a)$, $f(b)$ lar taqqoslanadi, ularning kattasi funksiyaning $[a;b]$ dagi eng katta qiymati bo‘ladi;

4) minimumlarning eng kichigi bilan $f(a)$, $f(b)$ lar taqqoslanadi, ularning kichigi funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo‘ladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada birgina maksimum (minimum) ga bo’lsa, bu maksimum (minimum) funksiyaning $[a;b]$ dagi eng katta (kichik) qiymati bo‘ladi.



3-rasm

4-misol. R radiusli doiraga eng katta yuzli ichki to‘g‘ri to‘rtburchak chizilsin.

Yechish. To'g‘ri to'rtburchak tomonlaridan x birini orqali belgilaymiz: $AB=x$; $BC=\sqrt{4R^2-x^2}$. U holda to'g‘ri to'rtburchak yuzi $y=x\sqrt{4R^2-x^2}$ bo'ladi, bunda $0<x<2R$. $y=x\sqrt{4R^2-x^2}$ ning eng katta qiymatini izlaymiz. Buning uchun y o'rniga y^2 ning eng katta qiymatini topamiz:

$$y^2=x^2(4R^2-x^2).$$

O'ng tomondagi ko'paytma ikki ko'paytuvchi x^2 va $4R^2-x^2$ dan iborat bo'lib, ularning yig‘indisi $x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$ o'zgarmas bo'ladi. Eng katta ko'paytma haqidagi teoremaga asosan y^2 ko'paytmaning eng katta qiymatiga $x^2=4R^2-x^2$ bo'lganda erishiladi. U holda $2x^2=4R^2$ yoki $x_1>0$ bo'lgani uchun $x=R\sqrt{2}$.

Demak, R radiusli doiraga ichki chizilgan barcha to'g‘ri to'rtburchaklardan faqat kvadrat eng katta yuzga ega bo'ladi.

2. Funksiya grafigining egilish (bukilish) nuqtalari. Funksiya grafigining egilish (bukilish) nuqtalarini topishda qavariq to‘plam va qavariq funksiya

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun biz avvalo qavariq to‘plam va qavariq funksiya tushunchalarini beramiz:

a) qavariq to‘plam tushunchasi. Bo‘sh bo‘lmagan $E \subset R^2$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar E to‘plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga ularni tutashtiruvchi kesma ham shu to‘plamga qarashli bo‘lsa, E to‘plam qavariq to‘plam deyiladi. Boshqacha aytganda, agar $\forall x, y \in E$ va barcha $\lambda \in [0;1]$ uchun $\lambda x + (1-\lambda)\ y \in E$ bo‘lsa, E qavariq to‘plam deyiladi.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $x,\ y \in E,\ x \neq y$ nuqtalar va barcha $\lambda \in (0;1)$ sonlar uchun $\lambda x + (1-\lambda) y$ ham E to‘plamning ichki nuqtasi bo‘lsa, E qat’iy qavariq to‘plam deyiladi. Masalan, doira qat’iy qavariq to‘plam bo‘ladi, parallepiped esa qat’iy qavariq to‘plam emas.

b) $f(x)$ funksiya E qavariq to‘plamda berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Agar $\forall x, y \in E$ va $\forall \lambda \in [0;1]$ uchun

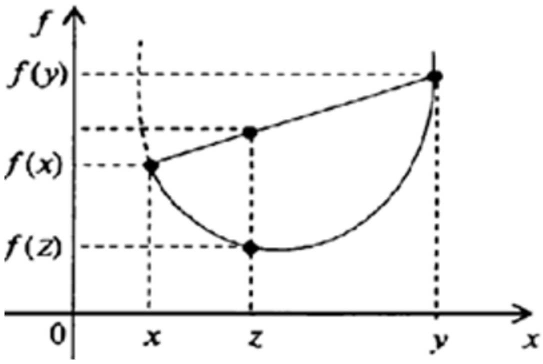
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y)$$

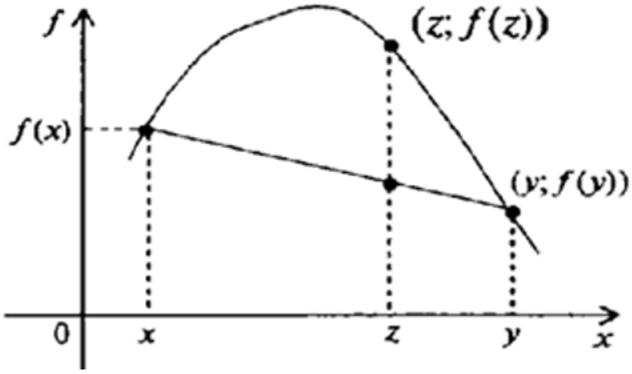
tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, qavariq E to‘plamda aniqlangan va chekli $f(x)$ funksiya qavariq deyiladi.(**4-a rasm**)

4-ta’rif. Agar $\forall x, y \in E$, $x \neq y$ nuqtalar va $\forall \lambda \in [0;1]$ uchun

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y)$$

qat’iy tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to‘plamda qat’iy qavariq deyiladi.





4-a va 4-b rasm

5-ta’rif. Agar $g(x) = -f(x)$ funksiya qavariq $E \subset R^1$ to‘plamda qavariq bo‘lsa, $f(x)$ funksiya E to‘plamda botiq deyiladi. (**4-a rasm**).

6-ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya grafigi istalgan vatarining o’rtasi funksiya grafigining mos nuqtasidan pastda (yuqorida) yotsa, bu funksiyaning grafigi berilgan oraliqda botiq (qavariq) deyiladi.

7-ta’rif. Agar istalgan $x_1, x_2 \in [a;b]$ uchun

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiyaning grafigi $[a;b]$ kesmada botiq (qavariqligi yuqoriga yo'nalgan) deyiladi.

8-ta’rif. Agar istalgan $x_1, x_2 \in [a;b]$ uchun $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiyaning grafigi $[a;b]$ kesmada qavariq (qavariq pastga yo‘nalgan) deyiladi.

b) qavariq funksiyalarning xossalari.

1. Qavariq (botiq) funksiyaning o’zgarmas musbat songa ko‘paytmasi yana qavariq (botiq) funksiya bo'ladi.

2. Qavariq (botiq) funksiyaning o’zgarmas manfiy songa ko‘paytmasi yana botiq (qavariq) funksiya bo'ladi.

3. Qavariq funksiyalarning yig‘indisi qavariq funksiya bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ – qavariq va o‘suvchi bo‘lib, $x=\varphi(t)$ esa botiq funksiya bo’lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya botiq bo'ladi.

5. Agar $f(x)$ – botiq va o‘suvchi bo‘lib, $x=\varphi(t)$ esa qavariq funksiya bo’lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya botiq bo'ladi.

6. Agar $f(x)$ – qavariq va o‘suvchi bo‘lib, $x=\varphi(t)$ esa qavariq funksiya bo’lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya qavariq bo'ladi.

7. Agar $f(x)$ – qavariq va kamayuvchi funksiya bo‘lib, $x=\varphi(t)$ esa botiq funksiya bo’lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya qavariq bo'ladi.

8. Agar $y=f(x)$ va $y=g(x)$ o‘zaro teskari (mos oraliqlarda) funksiyalar bo'lsa, u holda:

a) Agar $f(x)$ – botiq va o‘suvchi funksiya bo‘lsa, $g(x)$ funksiya qavariq va o‘suvchi bo’ladi;

b) Agar $f(x)$ – qavariq va kamayuvchi funksiya bo‘lsa, $g(x)$ funksiya botiq va kamayuvchi bo’ladi;

d) Agar $f(x)$ – qavariq va kamayuvchi funksiya bo‘lsa, $g(x)$ funksiya qavariq va kamayuvchi bo’ladi;

9. $[a;b]$ oraliqda botiq bo‘lgan $f(x)$ (o'zgarmas sondan farqli) funksiya shu oraliqning ichida o‘zining eng katta qiymatini qabul qilmaydi.

10. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar musbat va qavariq bo’lsa, u holda $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya qavariq bo'lishi uchun bu funksiyalarning biri o‘suvchi, ikkinchisi esa kamayuvchi bo‘lishi yetarli.

11. Agar $y=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiya qavariq bo‘lib, $f(x)$ manfiy, qavariq va o‘suvchi bo’lsa u holda $\varphi(x)$ funksiya musbat, botiq va o‘suvchi bo’ladi.

12. Agar $y=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiya botiq bo‘lib, $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar qavariq va manfiy bo’lsa, u holda qaralayotgan funksiyaning biri o‘suvchi, ikkinchisi kamayuvchi bo’ladi.

13. Agar $f(x)$ funksiya qavariq bo‘lsa, $\dfrac{1}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$ funksiya botiq bo'ladi.

14. Agar $f(x)$ funksiya musbat va qavariq bo'lsa, u holda $y=\sqrt[n]{f(x)}$ funksiya musbat va botiq bo'ladi (n- natural son)

15. Agar $[f(x)]^n$ funksiya qavariq bo'lsa (n- natural son), u holda $f(x)$ funksiya musbat va botiq bo‘ladi.

16. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar musbat, o'suvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya musbat, o'suvchi, botiq bo'ladi.

17. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar musbat, kamayuvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

18. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar manfiy, o'suvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

19. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar manfiy, kamayuvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI.

1. A.U. Abduhamidov, H. A. Nasimov, U. M. Nosirov, J. H. Husanov “Algebra va matematik analiz asoslari” II qism. Akademik litseylar uchun darslik 7-nashri. Toshkent. “O‘qituvchi”, 2008 yil.

2. A. Gaziyev, I. Isroilov, M. Yaxshiboyev “Funksiyalar va grafiklar” Toshkent. “Voris-nashriyot”, 2006 yil.

3. Azlarov T., Mansurov X., “Matematik analiz” T.: “O’zbekiston”. 1-qism 1994-yil

4. A.Sadullayev X. Mansurov “Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami” 2-qism. Toshkent “O‘zbekiston” 1995 y.