FARS PUBLISHERS Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

O‘ZGARISH CHIZIG‘I XARAKTERISTIKA BO‘LMAGAN TENGLAMALAR UCHUN BA’ZI CHEGARAVIY MASALALAR.

https://doi.org/10.5281/zenodo.14195069

Qudratova Shahnoza Shuxrat qizi

Termiz Davlat Universiteti, Matematika fizika fakulteti Matematik analiz kafedrasi o'qituvchisi

Safarova Adiba Rustam qizi.

Termiz Davlat Universiteti, Matematika fizika fakulteti Matematik analiz kafedrasi o'qituvchisi

Kirish. Matematik fizika tenglamalari deyilganda, albatta, o‘z-o‘zidan integral tenglamalar ham tushuniladi. Noma’lum funksiya integral ishorasi ostida qatnashgan har qanday tenglama integral tenglama deyiladi. Bu ta’rifni to‘liq deb bo‘lmaydi, chunki unda noma’lum funksiya ustida, integrallashdan tashqari, yana qanday amallar bajarish mumkinligi haqida hech narsa deyilmaydi.

Shunday bo‘lsada, berilgan ta’rifni asos qilib olib, eng ko‘p uchraydigan chiziqli integral tenglamalar sinflarini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $a \le x \le b$ oraliqda, $K(x,y)$ funksiya esa $Q\{a \le x, y \le b\}$ soha (kvadrat) da aniqlangan bo‘lsin. U holda

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (3.1.1)$$

tenglama $\varphi(x)$ noma’lum funksiyaga nisbatan chiziqli integral tenglama deyiladi, λ *-sonli parametr*. Izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiyaning argumenti x ham $[a,b]$ oraliqda o‘zgaradi deb hisoblaymiz.

$K(x,y)$ funksiya (3.1.1) tenglamaning *yadrosi*, $f(x)$ funksiya esa (3.1.1)tenglamaning *ozod hadi* deyiladi. Ozod had $f(x)$ aynan nolga teng yoki teng emasligiga qarab, (3.1.1) tenglama bir jinsli yoki bir jinsli bo‘lmagan tenglama deyiladi.

Agar integral tenglama

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (3.1.2)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u birinchi turdagi integral tenglama deb yuritiladi. Shu munosabat bilan (3.1.1) tenglama ikkinchi turdagi integral tenglama hisoblanadi.

Integrallash chegaralari a va b lar chekli ham cheksiz ham bo‘lishi mumkin.

Agar (3.1.1) tenglamada $K(x,y)$ yadro $Q\{a \le x,y \le b\}$ kvadratda ikkala argumenti bo‘yicha ham uzluksiz va $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa yoki umumiyroq bo‘lgan

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dxdy < +\infty, \qquad (3.1.3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < +\infty \qquad (3.1.4)$$

shartlarni qanoatlantirsa (3.1.1) tenglama 2-turdagi Fredgolm tenglamasi deyiladi.

Misollar. 1) Quyidagi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x + y^2\right)\varphi(y)dy + \sin x$$

tenglama 2-turdagi Fredgolm tenglamasidir, chunki $K(x,y) = x + y^2$ yadro va $f(x) = \sin x$ ozod had mos ravishda $Q\{a \le x,y \le b\}$ kvadratda va $[0,1]$ kesmada uzluksiz funksiyalardir.

2)

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy}\varphi(y)dy + e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tenglama ham Fredgolm tenglamasidir, chunki

$$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx < +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} K^2(x,y)dxdy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} e^{-2xy}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x}dx < +\infty.$$

3)

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy + f(x)$$

tenglama Fredgolm tenglamasi emas.

Haqiqatan ham,

FARS PUBLISHERS Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y)|^2\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|}dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^{x} e^{-2|x-y|}dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-2|x-y|}dy \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot dx,$$

ohirgi integral esa mavjud emas.

Quyidagi

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{3.1.5}$$

tenglama 2-turdagi chiziqli Volterra integral tenglamasi deyiladi.

(3.1.5) tenglamaning (3.1.1) tenglamadan asosiy farqi integral chegarasining biri o'zgaruvchi ekanligidadir. (3.1.1) tenglamaga nisbatan berilgan barcha ta'riflar (3.1.1) tenglama uchun ham o'rinlidir.

Volterra tenglamalarini Fredgolm tenglamalarining xususiy holi deb qarash mumkin. Volterra tenglamasining yadrosi $K(x,y)$ $a \le y \le x$ oraliqda aniqlangan. Agar uni $y > x$ lar uchun

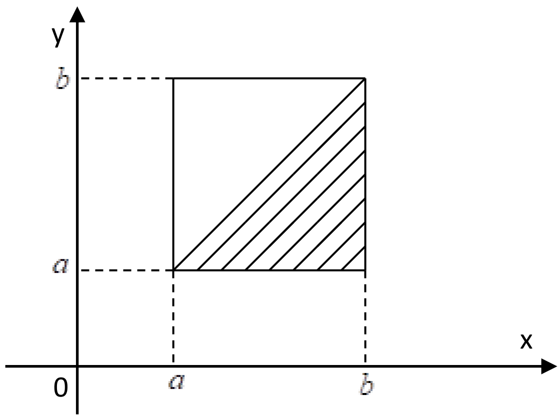
$$K(x,y) \equiv 0, \quad x < y \le b$$

deb aniqlasak, hosil bo'lgan yangi

$$\overline{K}(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & y \le x \\ 0, & y > x \end{cases}$$

yadro Fredgolm yadrosi deb qaralishi mumkin.

Bu $\overline{K}(x,y)$ yadro kvadratning shtrixlangan qismida $K(x,y)$ yadro bilan ustma-ust tushadi, qolgan qismida esa aynan nolga teng. Shunday aniqlangan $\overline{K}(x,y)$ yadro uchun



$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \overline{K}(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

tenglama Fredgolm tenglamasi bo'lib, u Volterra tenglamasining aynan o'zidir.

FARS PUBLISHERS Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

Demak, Fredgolm tenglamasi uchun olingan barcha natijalar, uning xususiy holi bo‘lgan Volterra tenglamalari uchun ham o‘rinli bo‘lishi shubhasiz. Lekin Volterra tenglamalarining faqat o‘zlarigagina hos xususiyatlari borki, ular bu tenglamalarni yechishda alohida ahamiyat kasb etadi.

Quyidagi Fredgolm tipidagi tenglamani qaraylik,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \quad (3.1.6)$$

$K(x,y)$ yadro Q kvadratda, $f(x)$ esa $[a,b]$ da uzluksiz funksiyalar bo‘lsin. Shu shartlar bajarilganda (3.1.6) tenglamani yechish uchun kema-ket yaqinlashish metodini qo‘llaymiz. Buning uchun yechim $\varphi(x)$ ni parametr λ ning butun va musbat darajalari bo‘yicha yoyilgan qator ko‘rinishida qidiramiz, ya’ni

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\lambda + \varphi_2(x)\lambda^2 + \ldots \qquad (3.1.7)$$

Agar (7) qator x bo‘yicha $[a,b]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, uni (3.1.6) tenglamaga qo‘yib, hadma-had integrallab, so‘ngra λ ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni o‘zaro tenglab topamiz:

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_1(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_0(y)dy$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy,$$

va umuman

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(x)dy \quad (n = 1,2,\ldots) \qquad (3.1.8)$$

Barcha $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots$ funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo‘lishi o‘z-o‘zidan ravshan. Agar λ parametr etarli darajada kichik bo‘lsa, (3.1.8) ketma-ketlikdan tuzilgan qator absolyut va tekis yaqinlashishini ko‘rsatamiz. U holda (3.1.8) qatorning yig‘indisi $\varphi(x)$ ham uzluksiz funksiya bo‘ladi va (3.1.8) tenglamani qanoatlantiradi.

$f(x)$ va $K(x,y)$ larning yopiq sohalarda uzluksizligidan

$$|f(x)| \le m, \quad |K(x,y)| \le M$$

deb yoza olamiz, m, M -lar musbat o‘zgarmas sonlar.

Shunga asoslanib, (3.1.8) formulalardan $\varphi_n(x)$ funksiyalar uchun quyidagi baholarni olamiz:

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

$$|\varphi_0(x)| \le m, \quad |\varphi_1(x)| \le \int_a^b |K(x,y)||\varphi_0(y)|\,dy \le$$

$$\le mM\int_a^b dy = mM(b-a),$$

$$|\varphi_2(x)| \le \int_a^b |K(x,y)||\varphi_1(y)|\,dy \le mM(b-a)\int_a^b dy = mM^2(b-a)^2,$$

va umuman

$$|\varphi_n(x)| \le m[M(b-a)]^n.$$

Demak (3.1.7) qatorning umumiy hadi uchun

$$|\varphi_n(x)\lambda^n| \le m[|\lambda|M(b-a)]^n$$

bahoni hosil qilamiz. Bundan koʻrinadiki, (3.1.7) qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi boʻladi, agarda

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad (3.1.1)$$

shart bajarilsa. Shunday qilib, (3.1.6) tenglama uchun (3.1.9) shart oʻrinli boʻlsa, bu tenglama yechimga ega va bu yechim yagonadir. Yagonaligini koʻrsatish yetarli.

Faraz qilaylik, (3.1.6) tenglamaning ikkita yechimi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ mavjud boʻlsin. U holda $u(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ (3.1.6) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning yechimi boʻladi, ya'ni

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy$$

Bundan $u_0 = \max\limits_{a\le x\le b}|u(x)|$ deb, $u_0 \le |\lambda|M(b-a)u_0$, ekanligini topamiz. Bu tengsizlik esa (3.1.9) ga teskaridir. Demak, $u_0 = 0$ yoki $u(x)\equiv 0$, ya'ni $\varphi(x)=\psi(x)$.

Endi *ketma-ket yaqinlashish metod*ini

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \quad (3.1.10)$$

Volterra tenglamasini yechishga tadbiq etaylik. Bu yerda ham $f(x)$ va $K(x,y)$ lar uluksiz funksiyalar boʻlsin. Avvalgidek yechimni (3.1.7) qator koʻrinishda izlaymiz va $\varphi_n(x)$ funksiyalar uchun ushbu formulalarni hosil qilamiz:

FARS PUBLISHERS Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 8.09 Impact factor
Volume-12| Issue-11| 2024 Published: |22-11-2024|

$$\varphi_0(x) = f(x),\ \ \varphi_n(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,\ \ (n = 1,2,...)$$

Yuqoridagidek $|f(x)| \le m$, $|K(x,y)| \le M$ ekanligidan quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$|\varphi_0(x)| \le m,\ \ |\varphi_1(x)| \le \int_a^x |K(x,y)||\varphi_0(x)|dy \le mM(x-a),$$

$$|\varphi_2(x)| \le \int_a^x |K(x,y)||\varphi_1(x)|dy \le mM^2\int_a^x (y-a)dy = mM^2\frac{(x-a)^2}{2}$$

va umuman

$$|\varphi_n(x)| \le m\frac{[M(x-a)]^n}{n!}.$$

Bu tengsizliklardan ko‘rinadiki, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\lambda^n$ qatorning hadlari mos ravishda $m\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|M(x-a)]^n}{n!}$ qatorning hadlaridan katta emas. Keyingi qator esa λ ning ixtiyoriy chekli qiymatlari uchun tekis yaqinlashadi va

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|M(x-a)]^n}{n!} = me^{|\lambda|M(x-a)}.$$

Demak, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\lambda^n$ qator absolyut va tekis yaqinlashadi, uning yig‘indisi $\varphi(x)$ (3.1.10) tenglamani qanoatlantiradi. Bu yechim ixtiyoriy fiksirlangan λ uchun yagonadir. Haqiqatan ham, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ (3.1.10) tenglamaning ikkita uzluksiz yechimlari desak, u holda $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ funksiya bir jinsli

$$u(x) = \lambda\int_a^x K(x,y)u(y)dy \qquad (3.1.11)$$

tenglamani yechimi bo‘ladi. (3.1.1) dan topamiz.

$$|u(x)| \le |\lambda|^2 m_* M_*(x-a) \qquad (3.1.12)$$

bunda $m_* = \max|u(x)|$, $M_* = \max|K(x,y)|$, (3.1.12) bahoni (3.1.12) tenglikning o‘ng tomoniga qo‘yib topamiz

$$|u(x)| \le |\lambda|^2 m_* M_*^2\frac{(x-a)^2}{2}$$

va shu protsessni davom ettirib

$$|u(x)| \le |\lambda|^n m_* M_*^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ixtiyoriy n uchun oʻrinli boʻlganligidan, $n \to \infty$ desak $u(x) = 0$ boʻlishini hosil qilamiz yoki $\varphi(x) = \psi(x)$. Shunday qilib, biz xulosa qilamizki, Volterra tipidagi (3.1.10) tenglamada ozod had $f(x)$ va yadro $K(x,y)$ uzluksiz boʻlsa, bu tenglama λ ning har qanday chekli qiymati uchun birdan bir yechimga ega ekan.Ikkinchi turdagi Fredgolm tenglamalari uchun esa bunday emas, yaʼni, ular λ ning har qanday qiymati uchun ham yechimga ega boʻlavermaydi, baʼzi λ lar uchun esa bir nechta yechimlarga ega boʻlishi mumkin.

Xulosa qilib shuni aytish kerakki. Matematik fizika tenglamalari deyilganda, albatta, oʻz-oʻzidan integral tenglamalar ham tushuniladi. Integral tenglamalar matematikaning turli sohalarida muhim rol oʻynaydi, ayniqsa integral tenglamalar nazariyasi oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni oʻrganishda keng qoʻllaniladi.

FOYDANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI.

1. Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. “O’zbekiston” nashriyoti. T. 2002 y.

2. Бизадзе А.В. Уравнения математической физики.М.Наука.1976г. 291с.

3.Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики.М.Наука.1977г.

4. Жўраев Т. Ж, Эгамбердиев У, О некоторых краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения. Известия АН УЗСССР, физ -мат .наук .1984. .№2, с 15-20

5. Фихтенголъц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I,II. Издательства «Наука» Москва 1969 г.